



東北大学

令和3年度 一般選抜入学試験 個別学力試験
出題意図【数学】

【前期日程】

文系問 1

出題意図

2 次方程式が与えられた範囲に解を持つかどうか、その必要十分条件に関する問題です。論理的に場合分けを行うことも求められています。また、条件を満たす点のなす領域を図示することも求めています。

講評

いくつかの場合に分けた上で、それぞれの場合に与えられた条件と同値な (a, b) の範囲を求め、さらに図示をすることになります。要点を押さえた説明も必要です。

基本的な問題ですが、類型的な解法よりは、考えを構成する力、論理と説明の的確性が求められています。それらは数学の範囲にとどまらない学力です。

場合分けの誤り、または必要のない煩雑な場合分けをしているものがありました。

解を持たないための必要十分条件の誤り(必要条件のみまたは十分条件のみ考えているもの)、また図示する際の誤りがそれぞれ少なからずありました。小問による誘導がないため、明確でない方針に従った解答もありました。適切な方針(いくつか考えられます)に従った答えは、多くが正答に至りました。

文系問 2

出題意図

正八角形の頂点からなる三角形の形を考慮しながら、場合の数を求める問題です。場合分けの適切さ、過不足なく数えること、要点を押さえた説明が求められています。

講評

(1)

出来は良好でした。

(2)

出来ていましたが、数え間違いが多少ありました。直角三角形に直角二等辺三角形を含めずに考えている誤答案もありました。

(3)

正答は(1)、(2)ほどは多くありませんでした。

単純な方針の下で考えると間違いにくい問題ですが、複雑に考えると途中で間違えることが多くなります。(1)-(3)とも、直径に着目することが単純な方針に繋がります。この問題に必要な数学の知識はごく少なく、大事なのは何を軸として考えるか、ということであり、それは数学に限ったことではありません。

説明がほとんどなく式のみのも、図示が適切でないものもありましたが、記述式の試験では説明が大事です。

文系問 3

出題意図

三角形と円の計量について、余弦定理、三角比、扇形の面積などに関する理解を問う問題です。直接に問われていませんが、図形を正しく把握することも必要となります。

講評

(1)

出来ていましたが、 $r < 1$ を考慮して適する解のみを得た解答は多くありませんでした。

(2)

出来ていました。(1)を用いなくても正答を得ることができます。

(3)

得点は差がつかしました。まず図示をして概形を把握することが必要で、その後は計算問題になります。

基礎的な問題ですが、 r の値がはじめから与えられていないため、(1)はやや考察を要する問題となっています。

文系問 4

出題意図

3次関数のグラフと2次関数のグラフの共通接線を求めること、およびそれらの共通接線と2次関数のグラフで囲まれる部分の面積を求めることが問題となっています。いずれも微分、積分を用いる標準的な問題です。

講評

(1)

出来ていましたが、計算で誤ったものもありました。

(2)

ある程度出来ていましたが、完全なものは多くありませんでした。この問題については計算の前に領域の図示が必要です。

類題が多い問題で、手のつけやすい問題でした。計算を間違わずに行うことができるかどうかで、結果が分かれました。

理系問 1

出題意図

2次方程式が与えられた範囲に解を持つかどうか、その必要十分条件に関する問題です。論理的に場合分けを行うことも求められています。また、条件を満たす点のなす領域を図示することも求めています。

講評

いくつかの場合に分けた上で、それぞれの場合に与えられた条件と同値な(a, b)の範囲を求め、さらに図示をすることになります。要点を押さえた説明も必要です。

基本的な問題ですが、類型的な解法よりは、考えを構成する力、論理と説明の的確性が求められています。それらは数学の範囲にとどまらない学力です。

場合分けの誤り、または必要のない煩雑な場合分けをしているものがありました。

解を持たないための必要十分条件の誤り(必要条件のみまたは十分条件のみ考えているもの)、また図示する際の誤りがそれぞれ少なからずありました。小問による誘導がないため、明確でない方針に従った解答もありました。適切な方針(いくつか考えられます)に従った答えは、多くが正答に至りました。

理系問 2

出題意図

三角形の面積比について問われています。また関数がとりうる値の範囲を求める問題と、簡単な整数問題も融合されています。

講評

(1)

基礎的な問題であり、良く出来ていました。この段階で計算間違いがないように確かめる必要がありますが、それには別の方法で計算してみることも役立ちます。

(2)

これも出来ていました。ただし結果は正しくても、その説明が不十分なものが少なくありませんでした。式だけで文章の説明がないものは、理解の度合いが不十分です。

(3)

多少の標準的な式変形の工夫は必要ですが、ある程度は出来ていました。

全体として、基本をしっかり理解している人は良く出来ていました。逆に理解が不足している場合は、(1)で止まっている人もいました。そのため、学力が得点に大きく反映される結果となりました。

理系問 3

出題意図

正八角形の頂点からなる三角形の形を考慮しながら、場合の数を求める問題です。場合分けの適切さ、過不足なく数えること、要点を押さえた説明が求められています。

講評

(1)

出来は良好でした。

(2)

出来ていましたが、数え間違いが多少ありました。直角三角形に直角二等辺三角形を含めずに考えている誤答もありました。

(3)

正答は(1)、(2)ほどは多くありませんでした。

単純な方針の下で考えると間違いにくい問題ですが、複雑に考えると途中で間違えることが多くなります。(1)-(3)とも、直径に着目することが単純な方針に繋がります。この問題で必要な数学の知識はごく少なく、大事なのは何を軸として考えるか、ということであり、それは数学に限ったことではありません。

説明がほとんどなく式のみのも、図示が適切でないものもありましたが、記述式の試験では説明が大事です。

理系問 4

出題意図

3次関数のグラフと直線のグラフの交点の座標を求めること、2つの交点の中点の軌跡を求めること、および3次関数のグラフと直線で囲まれた部分の面積を求めることが問われています。

講評

(1)

良く出来ていました。3次方程式の解と係数の関係を用いた人は、正答に至らなかった場合が多かったようです。

(2)

曲線のx座標の範囲を正しく求めていない解答が少なくありませんでした。

(3)

求める領域の概形を把握し図示しないと正答に至らないため、出来は良くありませんでした。

設問では求められていなくても、図を用いて問題の状況を把握することは大事です。

問題(2)、(3)の領域の概形は計算をする前に見当がつき、それは計算をした後の確認のために役立ちます。

理系問 5

出題意図

複素数の図形的な意味を偏角や絶対値との関係において問う問題です。また、ある条件を満たす三角形の面積の最大値を求める問題です。

講評

(1)

ある程度出来ていました。しかし、形式的に公式に当てはめる解答も目立ち、その場合は必ずしも理解しているとは思われないものもありました。

(2)

出来は悪くありませんでしたが、差もつきました。 $OA = OB$ 、 $OA = AB$ 、 $OB = AB$ の3つの場合に分けて考えることとなります。

(3)

出来は良くありませんでした。点1を中心とする円の媒介変数表示をしたとき、その原点に関する偏角について考え違いが多くありました。

複素数の基礎を理解するだけでなく、数学I、IIの図形の基礎の知識とも合わせて、総合的な理解と習熟が大事です。「公式」はそれを覚えるのではなく、理解して適切に使うようにして下さい。

理系問 6

出題意図

ある関数について、部分積分を用いて関数の値を表す漸化式を示すこと、積分の値の評価をすること、さらに関数の値の評価をすることが問われています。

講評

①

よく出来ていましたが、つじつま合わせの証明と見られる答案もありました。

②

類題が少なくないためか、出来は良好でした。

③

答えを求めたあと、それが条件を満たす最小のものであることの説明を論理的にしていな答案が少なくありませんでした。

問題としては難しくなく、全体として出来は悪くはありませんでしたが、時間が足りずに手をつけられなかったかもしれません。

【後期日程】

文系問 1

出題意図

方程式の整数解に関する問題です。これは基本事項ですが、「答え」を得る方法だけでなく、証明と説明を正しく書くことができるかが問われています。

講評

(1)

良くできていましたが、日本語として意味が通らない解答もありました。

(2)

次の基本がはっきりしていない解答が意外に多くありました。PがQであるための必要十分条件であることを示すには、「PならばQ」と「QならばP」をそれぞれ示すことになります。実際の証明の中では、(1)の条件が満たされるときに整数解をもつことを示す部分がポイントとなりました。

(3)

多くの人が解答していましたが、完全なものは多くありませんでした。一般解をまず求めて、与えられた条件を満たすものを求めるやり方が、一般性をもつという点で最も適切です。

文系問 2

出題意図

三角形を回転してできる円錐の体積を求め、その最大値を求める問題です。ベクトルと内積を用いること、微分法により関数の増減を調べることが求められています。

講評

(1)

良くできていました。この段階で解が1つの変数の関数となっていることに気付かないと、(2)に続きません。

(2)

出来は分かれました。(1)の解が1つの変数の関数となっていることに気付くことと、またその変数の範囲を考察する必要があります。

適切な図示により、方針が明らかになり、間違いが少なくなります。図より計算に頼っている解答もありました。

文系問 3

出題意図

パラメータによって定まる放物線が一定の直線に接するための条件を求める問題です。

また、その放物線の通過する領域が求められています。

講評

(1)

あまり出来は良くありませんでした。「すべての a に対して」という条件をどのように考えるかがポイントです。

(2)

出来は良くありませんでした。2次方程式の解の配置の問題となりますが、 x が0の場合を特別に扱うこと、正しい図示をすること、などで誤ったものが見られました。

通過領域を求める問題は、考え方はほぼ決まっていますが、着実に解答を得られるかどうかは力が良く反映されます。式だけに頼らず図形的な考察で解答を確かめることも役立ちます。

文系問 4

出題意図

漸化式で定まる場合の数の問題です。3種類のをn個並べる場合のうち、ある条件を満たすものの数を求める漸化式を求めることが問われています。また、その漸化式で定まる数列の性質を示すことが問われています。

講評

(1)

出来は良好でした。

(2)

これも出来は良好でした。

(3)

出来は良くありませんでした。

(1)と(2)は型通りの問題ですが、(3)はそうではありません。見慣れない問題の場合は、自分で方針を立てる必要があります。この場合にはいくつかの考え方があるので、試験時間の制限がなければ複数の方法で考えることを勧めます。

理系問 1

出題意図

方程式の整数解に関する問題です。これは基本事項ですが、「答え」を得る方法だけでなく、証明と説明を正しく書くことができるかが問われています。

講評

(1)

良くできていましたが、日本語として意味が通らない解答もありました。

(2)

次の基本がはっきりしていない解答が意外に多くありました。PがQであるための必要十分条件であることを示すには、「PならばQ」と「QならばP」をそれぞれ示すこととなります。実際の証明の中では、(1)の条件が満たされるときに整数解をもつことを示す部分がポイントとなりました。

多くの人が解答していましたが、完全なものは多くありませんでした。一般解をまず求めて、与えられた条件を満たすものを求めるやり方が、一般性をもつという点で最も適切です。

理系問 2

出題意図

三角形を回転してできる円錐の体積を求め、その最大値を求める問題です。ベクトルと内積を用いること、微分法により関数の増減を調べることが求められています。

講評

(1)

良くできていました。この段階で解が1つの変数の関数となっていることに気付かないと、(2)に続きません。

(2)

出来は分かれました。(1)の解が1つの変数の関数となっていることに気付くことと、またその変数の範囲を考察する必要があります。

適切な図示により、方針が明らかになり、間違いが少なくなります。図より計算に頼っている解答もありました。

理系問3

出題意図

2つの円が接するための条件、三角関数で表される関数のとる値、2次関数の解の配置の問題が融合されています。適切な方針を自分で立て、それを用いてやや複雑な計算を遂行することも求められています。

講評

(1)

かなり良く出来ていました。

(2)

いくつかの自然なステップがあるため、ほとんどの人はかなり取り組んでおり、それなりに出来ていましたが、完全な解にたどり着いたものは多くありませんでした。

$t=1$ のときに方程式を満たすことから a についての必要条件が出ますが、それが十分であることを吟味していないものが目立ちました。

理系問 4

出題意図

円と放物線が異なる4点で交わるための条件が問われています。その円と放物線で囲まれた部分の回転体の体積を計算することも問われています。計算はやや時間がかかります。

講評

(1)

出来は良好でした。ただ、答えは正しくても、その理由が良く分かっていない（説明がなされていない）と思われるものもありました。

(2)

出来は良好でしたが、次の点で間違っているものがありました。x軸とy軸を逆にしているもの、曲線Cと円を取り違えているもの、体積を表す積分を誤っているもの。

図示をし、設問を確認した上で、問題に取り組むようにすると、これらの誤りが減ると思われます。

理系問 5

出題意図

数列の極限に関する問題です。和の公式、和の記号を使用すること、計算を遂行することが求められています。

講評

(1)

ごく基礎的な内容を確認するための問題で、出来は良好でした。

(2)

基礎的な公式を使うのみなので、出来は良好でした。

(3)

和の記号を使い、(2)も用いて計算を行うものです。標準的な問題ですが、出来はやや分かれました。

数列の問題としては基礎的なものです。数列に関してはいくつかの基本を確実に理解することが大切です。

理系問 6

出題意図

空間において、与えられた平面と直交するベクトルを求めることが問われています。また、4つの与えられた平面に接する球を求めることが問われています。

講評

(1)

出来は良好でした。

(2)

出来は良くはありませんでした。与えられた4つの平面との位置関係から中心の座標を定める段階で、「内接」している場合と「外接」している場合があることに気づかないものがありました。

これは空間における問題ですが、平面において同様の問題を考えると役に立ちます。それはこの問題に限らないことです。

○志願者へのメッセージ

数学はすべての理系科目の基礎となるだけでなく、理系・文系を問わず、すべての学問の研究・応用の基礎となっています。

古代において計算、測量、暦法などのために生まれた数学は、生活に密接に関係した問題に答えるための「算法」でした。その後の数学を含めた文明の発展に従い、理論体系や推論が重視されるようになると、数学は生活の道具を超えて、知的文化の基礎的な位置を占めるようになりました。

現代では、大学での教育・研究のみならず、社会や日常生活においても数学は有用です。しかし「役立つ」ことに捉われると大事なことが見失われます。

本年度の数学の入試問題では、入学後に必要な、数学の基本の理解、推論と計算の力を確認する問題を出題しました。

数学の教科書や参考書では、基本事項の説明に続き、問題の解き方が例示され、さらに自分で問題を解くという構成になっています。これは有用性と学びやすさを前面に出したのですが、他方では「公式を適用する」とか「解き方を学ぶ」ということに重点を置く態度を助長します。すると必ずしも数学の理解を深めることにならないかも知れません。より根本的な理解をし、数学を自分のものとするためには、この概念や公式はなぜ必要か、この問題がなぜ解けるのか、または解けないのか、より一般的な考えや別の視点で説明できるか、といった視野の広い柔軟な考察が大切です。数学を理解し、また使うときに、それを表現する方法は推論によります。従って推論を記述する力により、理解度がよくわかります。問題を解くには計算が必要とされますが、そこで誤りが多い場合は、計算を軽視していることが原因かもしれません。また計算の確認の仕方にも理解度が反映します。

知識よりもその活用が大切だという点で、すべての教科に共通するような、考え方、論理、記述力が、数学においては特に純粋な形で問われています。このように数学を学んでいくと、それを学問の基礎として会得できます。