東北大学

令和４年度　一般選抜入学試験　個別学力試験
出題意図(数学)

【前期日程】

理系　大問１

出題意図

場合の数を求める論理力を問う問題です。計算する上で、奇数のみを考えるという条件から、一般的な数式表現に置き換えて考えることができなければ、解けない問題というわけではありませんが、整数の組み合わせの数え上げにおける正しい論理が必要です。また、数え上げる際の考え方の工夫も必要です。特に、小問(2)では、数え上げにおける重複をどのように処理するかがポイントとなります。なお、小問(3)は、一般論になっており、どのように数式として表現するか、あるいは、どのような解答の方針を採るかを問うています。一般的な数式表現による解答の方針を採れる受験生にとっては簡単な2次不等式の問題に過ぎないことになります。

講評

小問(2)に比べて、(1)と(3)は比較的よくできていました。小問(2)では、場合の数を求める手順における重複の場合についての処理を正しく行う論理が必要ですが、その点での誤りが多くみられました。解法としては、一般的な数式表現に置き換えて考える方針以外に、単純な数え上げで解答を求める方針を採った解答も少なくありませんでした。特に、小問(3)は、答えが比較的小さな奇数であったため、数え上げの正しい方針が採れれば、その方が答えに至るまでの時間は短かったかもしれません。しかし、それは、たまたま今回の問題の答えが小さな値だったからであり、より大きな値である場合には、その方法では答えに至ることはできなかったでしょう。数え上げにも論理力は欠かせませんが、数式表現による一般化ができる力も、より高度な知識・能力を目指すのには必要であることを知っていただきたいと思います。一方、一般的な数式表現による方針を採った答案では、得られた2次不等式の計算でミスをしてしまったものもありました。正確に計算を遂行する力も論理力の一部です。自分の計算ミスの可能性をできるだけ減らせるような心算で勉強することが大切です。また、数学の問題に対する解答では、解法によらず、答えに至る論理を適切に論述することが求められますが、論述が不十分、あるいは、曖昧な答案もありました。

理系　大問２

出題意図

関数の増減に関する問題です。小問(1)は 2 次関数の解の基本的な性質の理解、小問(2)は関数の増減を理解し、高次関数の極値を求める力、小問(3)は変数によって概形が変化する関数の増減を求める力を問うています。

講評

正答率はよくありませんでした。今年の受験生にとっては難問だったのかもしれません。特に、小問(2)と(3)が難しかったようです。小問(1)の解答に微分や極値の計算は不要ですが、「最小値」という語句に出合ったからか、いきなり導関数を計算し、増減表をつくろうとした受験者は解答時間をロスしたことになったと思います。一方、適切に考えることのできた受験生にとっては、小問(1)は得点できる易しい問題に思えたのではないでしょうか。解答にとって必要なアプローチをとるための数学の力が問われています。もっとも、小問(2)を正答できた受験生はけっして多くありませんでした。証明問題ですから、論理を１つずつ組み上げていく高い論理性が求められます。とはいえ、論理を成す各ステップは基礎的なものです。また、基礎的な性質をきちんと理解し、それをきちんとした論理に組み込んで明確に記述していかないと数学的に正しい証明として十分なものになりません。この問題では、証明の論述において、正確な計算が示されることが重要になりますが、それを示さずに結論を記した答案もありました。また、微分や積分の計算１つ１つは複雑なものではありませんが、計算間違いで失敗した答案も少なくありませんでした。正確に計算を遂行する力も論理力の一部です。自分の計算ミスの可能性をできるだけ減らせるような心算で勉強することが大切です。

理系　大問３

出題意図

数列の極限に関する標準的な問題です。はさみうちの原理などの数列の極限に関する標準的な道具を使う能力を問うています。

講評

小問(1)ではいろいろな解法の答案がありました。差を取り微分することによって証明しようとする解法では、極小値についての言及が抜けている答案がみられました。平方根を避けるために2乗してから差をとって考える場合には、対象となる不等式における各項の正負について場合分けが必要ですが、その点を無視した内容の答案も少なくありませんでした。また、平均値の定理、相加・相乗平均の関係を応用する方針を採った場合には、それらをどのように論理に組み込むのかが明確にされていなければ、解答としては不十分です。さらに、グラフを用いる方針を採った答案もありましたが、グラフを描いただけでは証明としては不十分です。グラフを用いて、数学的に何を示そうとするのか、何を示すことができるのかを明示することができなければなりません。小問(1)が誘導問題になっている小問(2)でしたが、難問だったようです。上からの評価の証明ができている答案は相当数ありましたが、下からの評価についてはうまくできていない答案が多く、数学的なセンスが必要だったかもしれません。多様な数学の演習問題を経験することによって、そのようなセンスは育ちます。

理系　大問４

出題意図

三角形に内接する円や直線に接する円の中心について、その幾何学的理解を問うています。また、極限値を求める力を問うています。

講評

小問(1)と(2)では問題に応えていない解答が目立ちました。「m を用いて t を表せ」「t を用いて b/a を表せ」という要求は、単に「m と t の関係式」「t と b/a の関係式」を求めているものではありません。また、2 次関数の解の公式を正しく使えていない答案も少なくありませんでした。公式を暗記して、使えば何かが得られる、というのではなく、公式を論理的に応用する力が必要です。小問(1)で複号「±」をそのままに答えとした受験生はその力が発揮できなかったということになります。小問(3)の極限計算では、m→+0 における t の値を間違った答案もありました。小問(1)と(2)では計算の正確さが最重要です。計算の１つ１つのステップには複雑なものはありませんが、丁寧に、確実に計算する力が問われました。

理系　大問５

出題意図

ねじれの位置にある 2 直線を取り、片方の直線上の点から他方に垂線の足を下す操作を繰り返して線分の列を作るとき、その線分が共通垂線に収束することを示す問題です。問題文から状況を正確に読み取る力を問うています。

講評

小問(1)はベクトルで表示して直交条件(内積 0)の連立方程式を立てて整理すること、小問(2)は極限をとって内積計算をもう一度行うことが必要です。直線のベクトル表示の意味を正しく理解できなかった受験生が多かったようです。特に、小問(1)において、直線の方向ベクトルと直線上の点の位置ベクトルを混同した誤答が目立ちました。また、ベクトルを利用した直交性の検討では、ベクトルの大きさや位置は任意にとることができますが、無用な要素を含むベクトルを使ってしまい、不要に面倒な計算をしてしまった答案も少なくありませんでした。ベクトルの性質の理解が不十分だったと思われます。なお、小問(3)では、論理的な根拠もなく強引にゼロとなると記述された答案も散見されましたが、論理の明解な記述ができる論理力が問われていますので、重大な誤りとなります。全般的には、小問(1)に正しく解答できている受験生にとっては、小問(2)、(3)は易しかったのではないかと思われます。

理系　大問６

出題意図

円柱と球の位置関係を正しく把握し、適切な場合分けができるか、基本的な体積計算を立式でき、その計算を正確に実行できるかを問うています。

講評

正答率がよかったとはいえませんでした。特に、出題意図ともなっている、円柱と球の位置関係についての場合分けが正しくできていない答案が目立ちました。とりわけ、円柱と半球のそれぞれ一部のみが共通部分となる場合についての場合分けや、その体積計算がうまく出来なかった答案が多くありました。また、積分の計算では、r の 3 乗を 2 乗に書き間違えてしまう、符号を間違える、といった重大なケアレスミスも散見されました。自らの計算ミスのリスクを下げるためには、自分が自分の書いた文字を見誤らないように丁寧に整理して計算を書き記していくことが肝要です。そこにも論理力は表れます。なお、円柱と円錐を混同した受験生もありました。数学の問題に限らず、第一に、問題文に記載されている内容を正確に理解する力が大切です。

文系　大問 1

出題意図

（理系と共通）

講評

解法としては、一般的な数式表現に置き換えて考える方針ではなく、単純な数え上げで解答を求めた方針を採った解答も多くありました。特に、小問(2)では、場合の数を求める手順における重複の場合の処理を正しく行う論理が必要ですが、その点での誤りが多くみられました。また、問題文に、例を用いて順列の数え上げであることが注意されているにもかかわらず、組み合わせのみを解答とした答案もありました。数学の問題に限らず、第一に、問題文に記載されている内容を正確に理解する力が大切です。また、解答では、解法によらず、答えに至る論理を適切に論述することが求められますが、論述が不十分、あるいは、曖昧な答案もありました。たとえば、小さな数で実験的に得られた結果を基に一般の場合についての公式を類推して解答する方針を採った答案もありましたが、類推が数学的に正しいことを証明しない限り、類推だけでは数学の解答としては不十分です。

文系　大問２

出題意図

絶対値の性質を理解した上で場合分けを丁寧に行うことができるか、2 次関数の積分や 3 次関数の微分ができるか、関数の増減と微分の性質を理解しているかを問う、基礎的な問題です。

講評

正答率は悪くはありませんでした。数学的に深刻な誤りとして、積分(束縛)変数 x と自由変数 t の区別ができていない答案も少なくありませんでした。小問(2)では、t の範囲が小問(1)と異なるため、t が 1 以上の場合を検討しなければなりませんが、それが抜けてしまっている答案が複数ありました。また、t が 0 以上の範囲で F が最小となる t の値 T やその最小値が求められているのにもかかわらず、t が 1 以下の場合と 1 以上の場合、それぞれについての「最小値」を最終解答として記した答案も複数ありました。それでは問題に応えた正しい解答には至っていません。問題文に書かれている内容を正確に理解することが正しい解答を導くためには、第一に重要です。関数 F(t)が偶関数であることを利用すれば若干簡単にはなりますが、それは本質的なものではありません。

文系　大問３

出題意図

条件が非線形となる線形計画法の問題です。小問(1)は基本的な数学的な取り扱い(点と直線の距離、領域の図示)ができるかどうかを問うています。小問(2)は論証を必要とします。

講評

題意に沿った図が描けることが必要です。問題文に「a、 b を正の実数とし」と条件が与えられているのにそれを無視した答案も相当にありました。領域を正しく図示するためには、領域を表す不等式の数学的な意味をきちんと理解できなければなりませんが、その点で誤って、間違った図になってしまった答案も目立ちました。また、直線が円に接することを数学的にどのように扱うのかを考える力も問われました。完答している答案が少なかったことは残念です。

文系　大問４

出題意図

空間図形の問題にベクトルを利用する力を問うています。いずれの小問もベクトルの内積が空間図形において何を表しているかを理解し、それを応用できる力が必要です。

講評

小問(1)の題意を正確に理解できていない答案が多くありました。たとえば、点 H から平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB の交点(垂線の足)が点 O であることが理解できないと、その後の正しい解答にはなかなか結びつきません。この問題では、出題意図に記された通り、空間における点の位置関係を正しく把握して、適切にベクトル計算を行うことが求められています。小問(1)が小問(2)の誘導になっていることに気がつくことのできる力をもった受験生にとってはこの問題は決して難しくはなかった一方、それに気がつけなかった受験生や、ベクトルの公式の応用に頼ってしまった受験生にとっては難問だったようです。

【後期日程】

理系　大問 1

出題意図

2 次関数の接線の式、与えられた直線と直交する直線の式、2 次関数の積分、相加相乗平均の理解、簡単な関数の極限計算を行う力を問う基礎的な問題です。考察力というより、不等式や微分積分を正しく利用できるか、単純な計算を確実にできるかどうかを問うています。

講評

小問(1)はほとんどの答案でできていましたが、誤答の多くは計算間違いによるものでした。正確に計算を遂行する力も論理力の一部です。自分の計算ミスの可能性をできるだけ減らせるような心算で勉強することが大切です。小問(2)では、T(a)やS(a) + T(a)の計算を正しく遂行しなければなりませんが、やはり、計算間違いによる誤答も少なくありませんでした。数学的な理解としての誤答として目立ったのは、T(a)に対応する領域の誤解でした。

理系　大問２

出題意図

　方程式の整数解を求める際に必要な素因数分解の性質の理解、整数の偶奇性を利用する力、それらに基づいた論理的な考察能力を問う問題です。

講評

　小問(1)についてはよく出来ていましたが、小問(2)は難しかったようです。整数の偶奇性を明確に考えながら場合分けして、論理立てて調べていく力が必要でしたが、うまく力を出せなかったと思われる答案が目立ちました。

理系　大問３

出題意図

平面図形、特に、三角形とその重心についての基礎的知識をもち、図形に付随する量を適切に数式化する技量を問う問題です。最終的に最小値を求める段階では微分法を用いてもよいのですが、最小値を求めるためのなにがしかの手法を身につけているかを問うてもいます。

講評

答案の出来にはばらつきがありましたが、満点の答案も少なからずありました。小問(2)の答えについては、予想できたと思われる答案も見られましたが、数学的に正確な論述で答えを導くことができなければ、正しい解答にはなりません。小問(1)では、辺の比についての説明が重複した答案も目立ちました。

理系　大問４

出題意図

確率の計算自体は難しくないのですが、本問の解答において最も重要な役割を果たすのは、起こりうる場合の組み合わせを論理的に考える力です。この意味で、本問の本質は、問題に与えられた操作のアルゴリズム的な論理を正しく理解し、運用することに尽きるといえます。受験生にとっては、考え方をどのように答案として記述するかが煩わしいかもしれませんが、論理を明確に記述する力を測る意図もあります。

講評

小問(1)はほとんどの答案でできていました。小問(2)では、考えうる場合の数を正しく求める必要がありましたが、そこで間違った答案が目立ちました。小問(2)が比較的難しかったようです。小問(3)は他の小問とは独立に考えることができ、解答の方針も複数ありましたが、その違いによらず、ポイントとなる確率を正しく求める必要がありました。

理系　大問５

出題意図

三角関数の性質を使う必要のある定積分、および、関数の最大値問題になっています。丁寧に１つ１つを計算してゆけば解くことは難しくありませんが、正しい計算を丁寧に行う能力が高くないと、正解を導くのは易しくはないでしょう。小問(1)では、唯一性の証明が問題の本質ですから、図だけからは自明でないことをどのように数学的に扱うかが問われます。小問(3)では、小問(1)の計算がそのまま使えることに気がつくか否かで計算量が異なってきます。

講評

三角関数の合成をうまく用いた答案が多く見られました。小問(2)では、必ずしも定積分を用いる必要はなく、初等的解法による答案も少なくありませんでした。丁寧な計算が必要な問題でしたが、全般的にはよくできていました。

理系　大問６

出題意図

回転体の体積を積分により求める能力を問うています。通常とは異なる方向に図形を回転させるため、積分による体積の計算の理屈をしっかりと理解している必要があります。

講評

小問(1)はよくできていました。小問(2)や(3)は、y 軸周りの回転体という題意の数学的に正しい理解の下で解くことが必要ですが、安易に「公式」に頼った論理的に不十分な答案も見られました。小問(3)では部分積分法を用いた正確な計算が求められますが、数学的には、V(1)＝０を論拠として明示することが必要です。数学に限りませんが、論述では、論拠を明確に記すことが大切です。なお、ほとんどの回転体についての問題では、x 軸周りの回転を考えることが多いかと思いますが、数学的には回転軸が異なるだけですので、y 軸周りの回転体であっても、考え方に違いはありません。軸周りの回転による回転体という主題に、x 軸周りの回転と思い込んだ答案も少なくありませんでした。問題文をしっかり読むことは大事です。

文系　大問１

出題意図

２次関数の接線の式、与えられた直線と直交する直線の式、２次関数の積分、相加・相乗平均の理解を問う基礎的な問題です。考察力というより、不等式や微分積分を正しく利用できるか、単純な計算を確実にできるかどうかを問うています。

講評

小問(1)も(2)もほとんどの答案でできていました。小問(2)では、相加・相乗平均を不適切に用いて誤った答案がありました。計算間違いによる誤答も目立ちました。

文系　大問２

出題意図

主に三角関数の取り扱いの力をみるものとなっていますが、問題を解くためには、2 次方程式の基礎的な取り扱いの知識も必要です。

講評

角度の吟味が不十分な答案が目立ちました。また、一部の答案では、ラジアンによる角度の表現を苦手とすることを示すような記述もみられました。三角関数の周期関数としての性質については、十分な数の基礎問題に取り組むことで容易に身につくはずです。三角関数の問題では、角度の範囲をしっかりと押さえて論述することが大切であることを理解してほしいと思います。

文系　大問３

出題意図

ベクトルが表す平面図形に関する問題です。小問(1)では平面座標系におけるベクトルの基礎についての理解、小問(2)では三角関数を微分し、極値を求めることができる力を問うています。

講評

小問(1)では、三角形の面積を定める際の 1/2 や絶対値が抜けるといった単純なミスが目立ちました。小問(2)では、面積の最大値を考える上で、面積を表す標識における θ の範囲に気をつける必要がありますが、その点で間違った答案も少なくありませんでした。

文系　大問４

出題意図

（理系と共通）

講評

小問(1)はほとんどの答案でできていました。小問(2)では、考えうる場合の数を正しく求める必要がありましたが、そこで間違った答案が目立ちました。小問(3)は他の小問とは独立に考えることができ、解答の方針も複数ありましたが、その違いによらず、ポイントとなる確率を正しく求める必要がありました。小問(3)の正答率はかなり低いものでした。

〇志願者へのメッセージ

入学試験の数学では、論理的思考や論理的記述の基礎能力を問う問題が出されます。受験生のみなさんには、立式、計算、答えのそれぞれを導く論理の道筋を明解に伝える力をつけていただきたいと思います。その力には、もちろん、わかりやすい表現や丁寧な文字による記述ができる能力も含まれます。

問題を正しく理解し、自分の解答を明快な論理的記述で記す能力は、けっして、暗記による知識だけで得られるものではありませんし、一朝一夕で育つものでもないでしょう。一方、その能力は、数学に限らず、自然科学、社会科学を含む学問一般にも必要ですし、より一般的には、いわゆるコミュニケーション能力がその能力に基づくものとも考えられます。高校までの勉強で「数学の力」をつけるためには、数学の多くの演習問題に取り組むことも大切ですが、数学以外の科目での勉強ではもちろん、他の人とのコミュニケーションの場でも、与えられた問題や課題、あるいは質問の本質を正しく理解し、自分の考えを明解に伝える努力を重ねていくことが肝要です。

現代では、大学での教育・研究のみならず、社会や日常生活においても数学の有用さが認識されるようになってきました。しかし、「役立つ」ことにとらわれすぎると大事なことが見失われます。それは、「役立つ」ことを役立てるための理解の誤りを生み出すかもしれません。たとえば、公式や解法を知っていても、それらの公式や解法を問題の解決に正しく適用できなければ、誤った答えに至るでしょう。数学の教科書や参考書、問題集で公式や解法の適用の例に出合った際には、是非、なぜその適用が必要なのか、その適用がなくても答えを得る方法はないのか、と考えながら理解を深めてください。その経験の積み重ねが論理的思考を錬成させてゆくはずです。

数学では、問題を正しく理解し、自分の解答を明快な論理的記述で記す能力を最も純粋な形で求められますが、上記の通り、それは、科学全般で必要となる力です。大学での勉学をより納得のいくものにするためにも、その力がしっかり育つように高校までの勉学に取り組んでください。